Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\textit{10 à 15 minutes}}$. *Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Pour $p \in [0,1]$, on se donne $(X_1, X_2, X_3, \dots)$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que chaque X_i soit de loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout entier $n \geq 1$, on s'intéresse à la quantité

$$f_n(p) = \mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq n/2).$$

(1) Calculer les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4. *On demande seulement des formules, pas de simplifier ces formules.*

(2) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est polynomiale de degré au plus n.

(3) Soit $p \in [0,1]$ tel que $p \neq 1/2$. Démontrer que la suite $(f_n(p))$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$ et calculer cette limite, dont la valeur peut dépendre de p. *On pourra utiliser la loi faible des grands nombres.*

⋆⋆⋆

Exercice 2. On s'intéresse à une bactérie imaginaire qui existe sous quatre versions (ou types). Ces types sont numérotés de 1 à 4. Pour tous i et j dans $\{1,2,3,4\}$, on se donne un réel $a_{i,j} \geq 0$. Cela définit une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}.$$

On appelle « vecteur de population » un vecteur *non-nul* $p = \left(\begin{smallmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{smallmatrix}\right)$ dont les coefficients p_i vérifient $p_i \geq 0$ et représentent la masse (en grammes) des bactéries de type i dans la population considérée. Si p est un vecteur de population, la population le lendemain est calculée selon la règle suivante : on pose $q = Ap$ et, pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$, la population de bactéries de type i le lendemain pèse q_i grammes.

On nous donne un vecteur de population u tel que la population de chaque type *double* du jour pour le lendemain ; un vecteur de population v tel que la population de chaque type *triple* du jour pour le lendemain ; un vecteur de population w tel que la population de chaque type se réduise *de moitié* du jour pour le lendemain.

(1) La famille (u, v, w) est-elle une famille génératrice de $\mathbf{R}^4$? En est-elle une famille libre ? une base ?

(2) Donner un exemple de matrice A et de vecteurs u, v et w vérifiant les hypothèses de l'énoncé.

(3) Dans cette question, on suppose que $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $v = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$. Trouver un vecteur de population x encodant une population de masse totale 1 gramme et telle que, le lendemain, la population totale pèse 4 grammes.

(4) Dans cette question, on suppose que $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

(4a) Diagonaliser les matrices $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 7/2 & 4 \end{pmatrix}$.

(4b) Trouver une base de vecteurs propres pour A. En trouver une pour la matrice $A' = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7/2 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.