Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance $\mu \in \mathbf{R}$ et de variance $\sigma^2 > 0$.

(1) Montrer que pour tous réels $t > 0$ et $a \geq 0$, on a

$$\mathrm{P}(X - \mu \geq t) \leq \frac{\mathrm{E}[(X - \mu + a)^2]}{(t + a)^2} = \frac{\sigma^2 + a^2}{(t + a)^2}\,.$$

(2) En déduire que pour tout réel $t > 0$, on a

$$\mathrm{P}(X - \mu \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2}\,.$$

(3) En utilisant le résultat de la question (2), montrer que

$$\mathrm{P}(X \geq \mu + \sigma) \leq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(X \leq \mu - \sigma) \leq \frac{1}{2}\,.$$

(4) Dans cette question, on appelle *médiane* de la variable aléatoire X tout réel m vérifiant

$$\mathrm{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2}\,.$$

Montrer que si m est une médiane de X, alors $|m - \mu| \leq \sigma$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère une application φ non-constante de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a

$$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)\,.$$

Attention ! L'application φ n'est pas supposée linéaire.

(1) *(1a)* Soit O la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Déterminer $\varphi(O)$.

(1b) Soit I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Déterminer $\varphi(I)$.

(2) Montrer que si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est inversible, alors $\varphi(A)$ est non-nul.

(3) *(3a)* Soient A et B deux matrices de même rang. Montrer que $\varphi(A)$ est non-nul si et seulement si $\varphi(B)$ est non-nul.

(3b) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que A^m est nulle. Déterminer $\varphi(A)$.

(3c) En déduire que si une matrice A vérifie $\varphi(A) \neq 0$, alors elle est inversible.