Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.

(1) Montrer que la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(5 < X \leq 7 \,|\, X > 1)$ est égale à la probabilité $\mathrm{P}(4 < X \leq 6)$.

(2) Trouver l'unique réel x tel que $\mathrm{P}\left(X \leq x\right) = \frac{1}{3}$. Comment appelle-t-on un x vérifiant cette égalité ?

(3) Dans cette question, on suppose qu'on a $\lambda = 1$. Sans calculer $\mathrm{P}(X \geq 1 + x)$, démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a l'inégalité $\mathrm{P}(X \geq 1 + x) \leq x^{-2}$. *Si vous n'y parvenez pas, essayez de démontrer que cette inégalité est valable pour tout x dans un intervalle de la forme $]0, a]$ avec a le plus grand possible — et ce toujours sans calculer $\mathrm{P}(X \geq 1 + x)$.*

(4) Calculer la fonction de répartition de $X^2 + X^4$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $n \geq 2$. On se donne $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ des nombres réels. On suppose que les x_k vérifient $n(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \neq (x_1 + \cdots + x_n)^2$. Dans cet exercice, on s'intéresse au nombre

$$a = \frac{n\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right) - \left(\sum_{j=1}^n x_j\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k\right)}{n\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) - \left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^2} = \frac{n(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) - (x_1 + \cdots + x_n)(y_1 + \cdots + y_n)}{n(x_1^2 + \cdots + x_n^2) - (x_1 + \cdots + x_n)^2}.$$

Ce nombre est digne d'intérêt car c'est la pente de la droite obtenue par régression linéaire des x_k et des y_k. Les questions 1 et 2 sont indépendantes l'une de l'autre.

(1) Dans cette question, on suppose que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

— si $x_k \geq 0$, alors on a l'inégalité $x_k \leq y_k \leq 2x_k$,

— si $x_k < 0$, alors on a l'inégalité $2x_k \leq y_k \leq x_k$.

(1a) On suppose, pour cette sous-question uniquement, qu'on a $\sum_{k=1}^n x_k = 0$. Démontrer que $a \in [1, 2]$.

(1b) On ne suppose plus $\sum_{k=1}^n x_k = 0$. Pensez-vous que a appartient nécessairement à $[1, 2]$? Si oui, démontrez-le. Sinon, construisez un contre-exemple.

(2) Dans cette question, on suppose que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $x_k = \cos(\frac{2k\pi}{n})$ et $y_k = \sin(\frac{2k\pi}{n})$.

(2a) Démontrer que la formule suivante est valable pour tout nombre *complexe* z différent de 1 :

$$\sum_{k=1}^n z^k = \frac{z^{n+1} - z}{z - 1}.$$

(2b) Calculer $\sum_{k=1}^n x_k$.

(2c) Calculer a.