Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\textit{10 à 15 minutes}}$*. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Pour tout entier $n \geq 0$, on note $p_X(n) = \mathrm{P}(X = n)$ et $p_Y(n) = \mathrm{P}(Y = n)$.

(1) Combien vaut $\sum_{n=0}^{\infty} p_X(n)$? Pourquoi ?

(2) Soit (a_n) une suite croissante majorée de nombre réels. On suppose que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathrm{P}(X = Y \text{ et } X \leq n) \leq a_n.$$

Montrer que la suite (a_n) converge et qu'on a l'inégalité $\mathrm{P}(X = Y) \leq \lim_{n\to\infty} a_n$.

(3) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité

$$\mathrm{P}(X = Y \text{ et } X \leq n) \leq \sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n} p_X(i)^2\right)\left(\sum_{j=0}^{n} p_Y(j)^2\right)}.$$

(4) En déduire l'inégalité suivante :

$$\mathrm{P}(X = Y) \leq \sqrt{\left(\sum_{i=0}^{\infty} p_X(i)^2\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} p_Y(j)^2\right)}.$$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Soient $N \geq 2$ un entier et a et b deux réels. On note E l'ensemble des vecteurs $u = (u_0, \ldots, u_N) \in \mathbf{R}^{N+1}$ vérifiant

$$\forall n \in \{0, 1, \ldots, N-2\}\,,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\,.$$

(1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{N+1}$.

(2) Montrer que l'application φ de E dans $\mathbf{R}^2$ qui à un élément $u \in E$ associe le couple (u_0, u_1) est un isomorphisme, et en déduire la dimension de E.

(3) Pour $r \in \mathbf{R}$, on pose $v_r = (1, r, \ldots, r^N)$. Déterminer les réels r tels que le vecteur v_r est dans E.

(4) On note p la fonction polynomiale qui à un réel x associe $p(x) = x^2 - ax - b$.

(4a) On se place dans la situation où p a deux racines réelles distinctes. Donner deux vecteurs explicites de $\mathbf{R}^{N+1}$ qui forment une base de E. En déduire une expression explicite des éléments de E.

(4b) Faire de même dans la situation où p admet une racine réelle double. *Indication : on vérifiera que si r est cette racine, alors le vecteur $(nr^n)_{n=0}^N$, c'est-à-dire le vecteur $(0, r, 2r^2, \ldots, Nr^N)$, est dans E.*

(5) Dans chacune des deux situations suivantes, déterminer, pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$, la valeur de u_n :

(5a) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \{0, \ldots, N-2\}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$.

(5b) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \{0, \ldots, N-2\}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.