Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$. *Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On s'intéresse à des événements $B_1, \dots, B_{100}$. On fait l'hypothèse suivante :

$$\forall k \in \{1, \dots, 100\}, \quad \mathrm{P}(B_k) = \frac{1}{100}\,.$$

Pour tout $k \in \{1, \dots, 100\}$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque B_k a lieu et 0 sinon. Autrement dit, la variable aléatoire X_k est l'indicatrice de B_k. Enfin, on introduit la variable aléatoire $S = \sum_{k=1}^{100} X_k$.

(1) Pour cette question et cette question seulement, on suppose les variables aléatoires X_k indépendantes. Quelle est alors la loi de S ?

(2) Pour cette question et cette question seulement, on suppose les événements B_k deux à deux disjoints. Quelle est alors la loi de S ?

(3) Calculer l'espérance de S.

(4) Démontrer que pour tous i et j dans $\{1, \dots, 100\}$, la covariance de X_i et X_j vérifie

$$-\frac{1}{10\,000} \leq \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \leq \frac{99}{10\,000}\,.$$

(5) Montrer que l'espérance de S^2 est inférieure ou égale à 100. Est-il possible de trouver des variables aléatoires X_k de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{100}$ telles que l'espérance de S^2 soit égale à 100 ?

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $n \geq 2$ un entier. On note f la fonction qui à tout $t \in [0, n]$ associe

$$f(t) = \left| \prod_{k=0}^{n} (t-k) \right| = |t(t-1)\dots(t-n)|\,.$$

(1) *(1a)* Montrer que la fonction f atteint son maximum sur $[0, n]$.

(1b) Pour $t \in [0, n]$, comparer $f(t)$ et $f(n-t)$. En déduire que f atteint son maximum sur $[0, \frac{n}{2}]$.

(1c) Pour $t \in [1, n]$ non entier, calculer $\frac{f(t-1)}{f(t)}$. En déduire que pour $t \in [1, \frac{n}{2}]$ non entier, on a $f(t-1) > f(t)$, puis que f atteint son maximum sur $]0, 1[$.

(2) On note g la fonction qui à tout $t \in]0, 1[$ associe $g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k}$.

(2a) Justifier que f est dérivable sur $]0, 1[$ et montrer que pour tout $t \in]0, 1[$, on a $\frac{f'(t)}{f(t)} = g(t)$.

(2b) Montrer que g est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et donner ses limites en 0 (à droite) et en 1 (à gauche). En déduire que, sur $]0, 1[$, la fonction f atteint son maximum en un unique réel, que l'on notera t_n. Montrer que l'on a

$$\frac{1}{t_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - t_n}\,.$$