Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$. *Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par la formule

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t.$$

(1) Sans calculer $F(x)$, étudier la dérivabilité et la monotonie de F.

(2) Démontrer que la fonction F est majorée par $F(1) + 1$ et en déduire qu'elle a une limite finie ℓ en $+\infty$.

(3) Montrer que ℓ est égal à $2F(1)$.

(4) Pour tout réel $t \geq 0$, on note

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) \quad \text{et} \quad S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)\,.$$

(4a) Expliquer pourquoi, pour tout $n \geq 1$, on a

$$s_n \leq F(1) \leq S_n\,.$$

(4b) Exprimer l'amplitude de cet encadrement, c'est-à-dire la différence $S_n - s_n$, en fonction de n.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit σ un réel strictement positif. Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, toutes d'espérance nulle et toutes de variance σ^2. On introduit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne associée. Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, de dimension k, avec $1 \leq k \leq n$. On note P la matrice, dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$, de la projection orthogonale sur H.

(1) Déterminer, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la valeur de l'espérance $\mathrm{E}\left[(PX)_i\right]$.

(2) Calculer l'espérance $\mathrm{E}[\|X\|^2]$, où $\|X\|$ désigne la norme de X.
La norme d'une matrice colonne X est définie comme celle du vecteur associé $(X_1, \dots, X_n)$.

(3) *(3a)* Vérifier que ${}^tP = P = P^2$, où ${}^tP$ désigne la transposée de P. Donner la valeur de la trace de P.

(3b) Montrer que $\|PX\|^2 = {}^tXPX$ et en déduire la valeur de $\mathrm{E}[\|PX\|^2]$.

(3c) En utilisant le théorème de Pythagore, déterminer la valeur de $\mathrm{E}[\|(I-P)X\|^2]$, où I désigne la matrice identité.