Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\textit{10 à 15 minutes}}$. *Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par la donnée de $u_1 \geq 1$ et

$$\forall n \geq 1\,,\ u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n}\,\cdot$$

(1) Dans le cas particulier où $u_1 = 1$, déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, la valeur de u_n.

(2) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

On suppose désormais que $u_1 > 1$.

(3) Pour tout $n \geq 1$, on note $v_n = u_n - n$.

(3a) Pour tout $n \geq 1$, exprimer v_{n+1} sous la forme $v_n f(u_n)$, où f est une fonction que l'on précisera.

(3b) Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge.

(3c) En déduire que $\frac{1}{n}u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un entier et soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$. On suppose qu'on a l'égalité

$$f \circ f + 15\,\mathrm{Id} = 8f\,,$$

où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^n$.

(1) Déterminer deux réels distincts a et b tels que

$$f \circ f - 8f + 15\,\mathrm{Id} = (f - a\,\mathrm{Id}) \circ (f - b\,\mathrm{Id})\,.$$

Pour la suite de l'exercice, on fixe a et b deux réels distincts vérifiant la condition de la question 1. Si vous avez trouvé des valeurs concrètes pour a et b en question 1, vous pouvez en outre supposer que a et b prennent ces valeurs précises.

(2) On suppose dans cette question que $\mathbf{R}^n = \ker(f - a\,\mathrm{Id}) \oplus \ker(f - b\,\mathrm{Id})$, ce qui sera établi en question (3). Montrer que f est diagonalisable.

(3) *(3a)* Déterminer $\ker(f - a\,\mathrm{Id}) \cap \ker(f - b\,\mathrm{Id})$.

(3b) Établir que $\mathbf{R}^n = \ker(f - a\,\mathrm{Id}) \oplus \ker(f - b\,\mathrm{Id})$.