⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier et soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, toutes de loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\mathrm{P}(X_i \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

On note $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

(1) Déterminer la fonction de répartition de M_n, notée F_n, ainsi que sa densité, notée f_n.

(2) Montrer, sans trop de calculs, que $\mathrm{E}[M_n] \leq n$.

(3) Vérifier que $t(1 - F_n(t))$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

(4) En déduire, après une intégration par parties, que

$$\mathrm{E}[M_n] = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(t))\, \mathrm{d}t\,.$$

(5) Montrer que $\mathrm{E}[M_n] = \int_0^1 \frac{1-y^n}{1-y}\, \mathrm{d}y$ et établir finalement que $\mathrm{E}[M_n] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On s'intéresse dans cet exercice à dix types de fruits, qu'on numérote de 1 à 10 (par exemple 1 = abricots, 2 = bananes, 3 = cerises, etc.). Xavier a en tête des prix adaptés pour chaque type de fruits : pour chaque $i \in \{1, \ldots, 10\}$, il note x_i le prix en euros qu'il considère adapté pour un fruit de type i. Yasmine a elle aussi en tête des prix adaptés pour chaque type de fruits : pour chaque $i \in \{1, \ldots, 10\}$, elle note y_i le prix en euros qu'elle considère adapté pour un fruit de type i. On introduit les vecteurs suivants $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{10} \end{pmatrix}$, dont les coordonnées sont strictement positives.

Vanessa arrive et propose des trocs. On appelle troc un échange d'une collection de fruits contre une autre collection de fruits. Un troc sera encodé par un vecteur $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{10} \end{pmatrix}$, où a_i désigne la quantité de fruits de type i que Vanessa désire obtenir (un a_i négatif s'interprète comme « Vanessa propose de *donner* $|a_i|$ fruits de type i »). Vanessa propose neuf trocs. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, 9\}$, on note $v_j = \begin{pmatrix} v_{1,j} \\ \vdots \\ v_{10,j} \end{pmatrix}$ le vecteur encodant le $j^{\text{ème}}$ troc proposé par Vanessa.

Il se trouve qu'aussi bien Xavier que Yasmine estime que chacun des neuf trocs proposé par Vanessa est parfaitement équilibré en termes de prix.

(1) Expliquer pourquoi, pour tout $j \in \{1, \ldots, 9\}$, le vecteur x est orthogonal à v_j et le vecteur y est aussi orthogonal à v_j.

(2) Dans cette question et cette question seulement, on suppose que, pour tout $j \in \{1, \ldots, 9\}$, le $j^{\text{ème}}$ troc consiste pour Vanessa à donner un fruit de type j et demander en échange deux fruits de type $j + 1$. Montrer que dans ce cas la famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_9)$ est une famille libre.

(3) On suppose dans cette question que la famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_9)$ est une famille libre.

(3a) Montrer que les vecteurs x et y sont colinéaires. En déduire que si Vanessa propose un dixième troc, ce troc sera jugé équilibré par Xavier si et seulement s'il est jugé équilibré par Yasmine.

(3b) A-t-on nécessairement égalité des vecteurs x et y ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\textit{10 à 15 minutes}}$*. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.