Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Dans tout cet exercice, α désigne un réel strictement positif fixé. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_α donnée par

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1], \\ \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \in]1, +\infty[\,. \end{cases}$$

(1) Calculer, pour tout réel t, la quantité $\mathrm{P}(X > t)$.

(2) À quelle condition sur α la variable aléatoire X admet-elle une espérance finie ? Lorsque cette condition est vérifiée, donner la valeur de $\mathrm{E}[X]$.

(3) Pour tout réel x, on note $\lceil x \rceil$ l'unique entier k tel que $k-1 < x \leq k$. Le nombre $\lceil x \rceil$ s'appelle la partie entière supérieure de x. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \lceil \ln(X) \rceil$.

(4) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et toutes de densité f_α. On pose

$$Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)\,.$$

Montrer que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, la quantité $\mathrm{P}\left(n(Y_n - 1) > t\right)$ converge, quand n tend vers $+\infty$, vers une limite que l'on déterminera.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par $u_0 > 0$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}\,.$$

(1) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite, finie ou non, que peut-on dire de cette limite ?

(2) *(2a)* Montrer que s'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $u_{p+1} \leq u_p$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang et tend vers 0.

(2b) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ lorsque l'hypothèse de la question $(2a)$ n'est pas vérifiée ?

(3) Montrer que s'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $u_p \leq p+1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

(4) Montrer que s'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $u_p \geq p+2$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

(5) Prouver l'existence d'un réel $a \in [1, 2]$ tel que si $u_0 < a$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, et si $u_0 > a$, alors elle diverge.