

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interrompons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur \mathbf{R} par la formule $f(x) = \exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right)$.

- (1) Dresser le tableau de variations de f . On y indiquera notamment les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
- (2) Montrer qu'on a l'égalité $\int_0^{+\infty} xf(x) dx = 1 + \int_0^{+\infty} f(x) dx$.
- (3) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$. On pourra effectuer un changement de variable $y = x + a$ pour un a bien choisi.
- (4) Calculer le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 3 pour x proche de 0. En déduire l'allure locale du graphe de f au voisinage de 0.

Exercice 2. Soit F le sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^4 engendré par $u_1 = (2, -1, -3, 2)$ et $u_2 = (3, 1, 0, 5)$, et soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \text{ tels que } 4x + y - z - t = 0 \text{ et } 3y - 3z + t = 0\}$.

- (1) Vérifier que G est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^4 .
- (2) Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle et en donner un vecteur v non-nul.
- (3) Compléter v en une base de F , c'est-à-dire donner une base de F dont le premier vecteur est v . De même, compléter v en une base de G .
- (4) Déterminer une base de $H = F + G$.
- (5) Soit $w = (1, 1, 0, 0)$, et soit $D = \text{Vect}(w)$ la droite vectorielle engendrée par w . Soit enfin

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \text{ tels que } 3x - 2y + z + 4t = 0\}.$$

- (5a) Montrer que S et D sont supplémentaires dans \mathbf{R}^4 .
- (5b) On note p le projecteur sur D parallèlement à S . Pour tout $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$, calculer $p(u)$ en fonction de x, y, z et t .