Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$*. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. On définit une fonction f en posant, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+4-4y\right).$$

(1) Résoudre l'équation $f(x, y) = 0$.

(2) Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, que peut-on dire du signe de $f(x, y)$?

(3) *(3a)* Déterminer les points critiques de f.

(3b) Pour chaque point critique que vous avez trouvé : s'agit-il d'un minimum local ? d'un minimum global ? d'un maximum local ? d'un maximum global ?

(4) On se donne g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $\mathbf{R}^2$. On définit une fonction h par la formule $h(x, y) = \exp(g(x, y))$. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, montrer que (x, y) est un point critique de h si et seulement si (x, y) est un point critique de g.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Étant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, on considère la procédure définie en appliquant successivement les quatre étapes suivantes :

a) échanger la première ligne et la troisième ligne ;

b) dans la matrice obtenue à l'étape précédente, soustraire la deuxième colonne à la troisième, c'est-à-dire remplacer la colonne C_3 par $C_3 - C_2$;

c) dans la matrice obtenue à l'étape précédente, ajouter la troisième ligne à la deuxième, c'est-à-dire remplacer la ligne L_2 par $L_2 + L_3$;

d) dans la matrice obtenue à l'étape précédente, échanger la première colonne et la troisième colonne.

On notera $\varphi(M)$ la matrice obtenue en appliquant cette procédure *(prononcer « phi M »)*. Enfin, on pose

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 10 & 20 & 50 \\ 100 & 200 & 500 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer $\varphi(N)$.

(2) Trouver deux matrices P et Q telles que, pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, on ait $\varphi(M) = PMQ$.

(3) Si on applique les étapes non plus dans l'ordre « abcd » mais dans l'ordre « acbd », est-ce que cette nouvelle procédure renvoie toujours pour résultat $\varphi(M)$? Même question si on procède dans l'ordre « adcb ».

(4) Est-ce que l'application φ définit un isomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ vers $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$? Si oui, donner sa bijection réciproque.

(5) *(5a)* Déterminer la matrice PQ.

(5b) Exprimer le spectre de $\varphi(M)$ en fonction du spectre de M.

Commentaire a posteriori : la matrice Q n'étant pas l'inverse de P, la question 5b n'était pas traitable. La façon de gérer la reprise et la notation ont été adaptées en conséquence.