Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\textit{10 à 15 minutes}}$. *Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On définit la fonction f par la formule $f(x) = \exp(x)$ et g par la formule $g(x) = x^5$. Les fonctions f et g ont pour domaine de définition $\mathbf{R}$.

(1) Pour chacune des fonctions h suivantes, démontrer l'énoncé « pour tous réels x et y vérifiant $x \leq y$, on a $h(x) \leq h(y)$ ».

- *(1a)* Traiter la fonction $h_1 = g$, définie sur $\mathbf{R}$ par la formule $h_1(x) = x^5$.
- *(1b)* Traiter la fonction $h_2 = g \circ f$, définie sur $\mathbf{R}$ par la formule $h_2(x) = g(f(x))$.
- *(1c)* Traiter la fonction $h_3 = g \circ f \circ g \circ f \circ g$, définie sur $\mathbf{R}$ par la formule $h_3(x) = g(f(g(f(g(x)))))$.

(2) On introduit A l'ensemble de tous les $(x, \ln(x))$ où x parcourt $]0, +\infty[$. De même, on désigne par B l'ensemble de tous les $(x, \exp(-x))$ où x parcourt $\mathbf{R}$. Autrement dit, A désigne la partie du plan qui correspond au graphe de la fonction $\ln(x)$, et B fait de même pour la fonction $\exp(-x)$. Trouver un endomorphisme φ de $\mathbf{R}^2$ tel que l'image de A par φ soit égale à l'ensemble B. L'image de A par φ est définie comme l'ensemble des $\varphi(x, y)$ où (x, y) parcourt A.

⋆⋆⋆

Exercice 2.

(1) On introduit cinq points dans le plan $\mathbf{R}^2$: le point A est défini par les coordonnées $(1, 2)$, le point B par $(4, 2)$, C par $(3, 6)$, D par $(-2, 1)$ et enfin O par $(0, 0)$. Pour chaque $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, on dira qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ est de type k si son intersection avec $\{A, B, C, D, O\}$ contient *exactement* k points.

- *(1a)* Dessiner les points A, B, C, D et O dans le plan. Donner une équation de la droite passant par les points B et C.
- *(1b)* Pour chaque $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, répondre à la question suivante : combien y a-t-il de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$ qui sont de type k ?

(2) On considère les vecteurs $v_1 = (0, 0)$, $v_2 = (1, 0)$, $v_3 = (0, 1)$ et $v_4 = (1, 1)$. On se donne Z une variable aléatoire telle que $\mathrm{P}(Z = 1) = \mathrm{P}(Z = 2) = \mathrm{P}(Z = 3) = 1/6$ et $\mathrm{P}(Z = 4) = 1/2$. On se donne W une variable aléatoire indépendante de Z et de même loi. On note X la première coordonnée de v_Z et Y sa seconde coordonnée. De même, on note U la première coordonnée de v_W et V sa seconde coordonnée. On peut reformuler les deux dernières phrases en disant qu'on a $v_Z = (X, Y)$ et $v_W = (U, V)$.

- *(2a)* Est-ce que les variables aléatoires U et V sont indépendantes ? Est-ce que U et X sont indépendantes ?
- *(2b)* On s'intéresse au produit scalaire de v_W et v_Z : on introduit la variable aléatoire $S = \langle v_W, v_Z \rangle$. Calculer l'espérance de S.
- *(2c)* Quelle est la probabilité de l'événement « les vecteurs v_W et v_Z forment une base de $\mathbf{R}^2$ » ?