Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$*. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Pour $p \in [0,1]$, on se donne $(X_1, X_2, X_3, \dots)$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que chaque X_i soit de loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout entier $n \geq 1$, on s'intéresse à la quantité

$$f_n(p) = \mathrm{P}(X_1 + \cdots + X_n \leq n/2).$$

(1) Calculer les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4. *On demande seulement des formules, pas de simplifier ces formules.*

(2) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est polynomiale de degré au plus n.

(3) Soit $p \in [0,1]$ tel que $p \neq 1/2$. Démontrer que la suite $(f_n(p))$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$ et calculer cette limite, dont la valeur peut dépendre de p. *On pourra utiliser la loi faible des grands nombres.*

⋆⋆⋆

Exercice 2. On s'intéresse à une bactérie imaginaire qui existe sous quatre versions (ou types). Ces types sont numérotés de 1 à 4. Pour tous i et j dans $\{1,2,3,4\}$, on se donne un réel $a_{i,j} \geq 0$. Cela définit une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}.$$

On appelle « vecteur de population » un vecteur *non-nul* $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$ dont les coefficients p_i vérifient $p_i \geq 0$ et représentent la masse (en grammes) des bactéries de type i dans la population considérée. Si p est un vecteur de population, la population le lendemain est calculée selon la règle suivante : on pose $q = Ap$ et, pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$, la population de bactéries de type i le lendemain pèse q_i grammes.

On nous donne un vecteur de population u tel que la population de chaque type *double* du jour pour le lendemain ; un vecteur de population v tel que la population de chaque type *triple* du jour pour le lendemain ; un vecteur de population w tel que la population de chaque type se réduise *de moitié* du jour pour le lendemain.

(1) La famille (u, v, w) est-elle une famille génératrice de $\mathbf{R}^4$? En est-elle une famille libre ? une base ?

(2) Donner un exemple de matrice A et de vecteurs u, v et w vérifiant les hypothèses de l'énoncé.

(3) Dans cette question, on suppose que $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Trouver un vecteur de population x encodant une population de masse totale 1 gramme et telle que, le lendemain, la population totale pèse 4 grammes.

(4) Dans cette question, on suppose que $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 7/2 & 4 \end{pmatrix}$.

(4a) Diagonaliser les matrices $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 7/2 & 4 \end{pmatrix}$.

(4b) Trouver une base de vecteurs propres pour A. En trouver une pour la matrice $A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 7/2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\textit{10 à 15 minutes}}$*. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance $\mu \in \mathbf{R}$ et de variance $\sigma^2 > 0$.

(1) Montrer que pour tous réels $t > 0$ et $a \geq 0$, on a

$$\mathrm{P}(X - \mu \geq t) \leq \frac{\mathrm{E}[(X-\mu+a)^2]}{(t+a)^2} = \frac{\sigma^2 + a^2}{(t+a)^2} \cdot$$

(2) En déduire que pour tout réel $t > 0$, on a

$$\mathrm{P}(X - \mu \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + t^2} \cdot$$

(3) En utilisant le résultat de la question (2), montrer que

$$\mathrm{P}(X \geq \mu + \sigma) \leq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(X \leq \mu - \sigma) \leq \frac{1}{2} \cdot$$

(4) Dans cette question, on appelle *médiane* de la variable aléatoire X tout réel m vérifiant

$$\mathrm{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \cdot$$

Montrer que si m est une médiane de X, alors $|m - \mu| \leq \sigma$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère une application φ <u>non-constante</u> de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$. On suppose que pour toutes matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on a

$$\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)\,.$$

Attention ! L'application φ n'est pas supposée linéaire.

(1) *(1a)* Soit O la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Déterminer $\varphi(O)$.

(1b) Soit I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Déterminer $\varphi(I)$.

(2) Montrer que si une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est inversible, alors $\varphi(A)$ est non-nul.

(3) *(3a)* Soient A et B deux matrices de même rang. Montrer que $\varphi(A)$ est non-nul si et seulement si $\varphi(B)$ est non-nul.

(3b) Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que A^m est nulle. Déterminer $\varphi(A)$.

(3c) En déduire que si une matrice A vérifie $\varphi(A) \neq 0$, alors elle est inversible.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$. *Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit $\lambda > 0$ et soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.

(1) Montrer que la probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(5 < X \leq 7 \,|\, X > 1)$ est égale à la probabilité $\mathrm{P}(4 < X \leq 6)$.

(2) Trouver l'unique réel x tel que $\mathrm{P}\left(X \leq x\right) = \frac{1}{3}$. Comment appelle-t-on un x vérifiant cette égalité ?

(3) Dans cette question, on suppose qu'on a $\lambda = 1$. Sans calculer $\mathrm{P}(X \geq 1 + x)$, démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a l'inégalité $\mathrm{P}(X \geq 1 + x) \leq x^{-2}$. *Si vous n'y parvenez pas, essayez de démontrer que cette inégalité est valable pour tout x dans un intervalle de la forme $]0, a]$ avec a le plus grand possible — et ce toujours sans calculer $\mathrm{P}(X \geq 1 + x)$.*

(4) Calculer la fonction de répartition de $X^2 + X^4$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $n \geq 2$. On se donne $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_n$ des nombres réels. On suppose que les x_k vérifient $n(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \neq (x_1 + \cdots + x_n)^2$. Dans cet exercice, on s'intéresse au nombre

$$a = \frac{n\Big(\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big) - \Big(\sum_{j=1}^n x_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^n y_k\Big)}{n\Big(\sum_{i=1}^n x_i^2\Big) - \Big(\sum_{j=1}^n x_j\Big)^2} = \frac{n(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) - (x_1 + \cdots + x_n)(y_1 + \cdots + y_n)}{n(x_1^2 + \cdots + x_n^2) - (x_1 + \cdots + x_n)^2}.$$

Ce nombre est digne d'intérêt car c'est la pente de la droite obtenue par régression linéaire des x_k et des y_k. Les questions 1 et 2 sont indépendantes l'une de l'autre.

(1) Dans cette question, on suppose que pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$,

— si $x_k \geq 0$, alors on a l'inégalité $x_k \leq y_k \leq 2x_k$,

— si $x_k < 0$, alors on a l'inégalité $2x_k \leq y_k \leq x_k$.

(1a) On suppose, pour cette sous-question uniquement, qu'on a $\sum_{k=1}^n x_k = 0$. Démontrer que $a \in [1, 2]$.

(1b) On ne suppose plus $\sum_{k=1}^n x_k = 0$. Pensez-vous que a appartient nécessairement à $[1, 2]$? Si oui, démontrez-le. Sinon, construisez un contre-exemple.

(2) Dans cette question, on suppose que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a $x_k = \cos(\frac{2k\pi}{n})$ et $y_k = \sin(\frac{2k\pi}{n})$.

(2a) Démontrer que la formule suivante est valable pour tout nombre *complexe* z différent de 1 :

$$\sum_{k=1}^n z^k = \frac{z^{n+1} - z}{z - 1}.$$

(2b) Calculer $\sum_{k=1}^n x_k$.

(2c) Calculer a.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. *Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Pour tout entier $n \geq 0$, on note $p_X(n) = \mathrm{P}(X = n)$ et $p_Y(n) = \mathrm{P}(Y = n)$.

(1) Combien vaut $\sum_{n=0}^{\infty} p_X(n)$? Pourquoi ?

(2) Soit (a_n) une suite croissante majorée de nombre réels. On suppose que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathrm{P}(X = Y \text{ et } X \leq n) \leq a_n.$$

Montrer que la suite (a_n) converge et qu'on a l'inégalité $\mathrm{P}(X = Y) \leq \lim_{n\to\infty} a_n$.

(3) Démontrer que pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité

$$\mathrm{P}(X = Y \text{ et } X \leq n) \leq \sqrt{\left(\sum_{i=0}^{n} p_X(i)^2\right)\left(\sum_{j=0}^{n} p_Y(j)^2\right)}.$$

(4) En déduire l'inégalité suivante :

$$\mathrm{P}(X = Y) \leq \sqrt{\left(\sum_{i=0}^{\infty} p_X(i)^2\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} p_Y(j)^2\right)}.$$

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Soient $N \geq 2$ un entier et a et b deux réels. On note E l'ensemble des vecteurs $u = (u_0, \ldots, u_N) \in \mathbf{R}^{N+1}$ vérifiant

$$\forall n \in \{0, 1, \ldots, N-2\}\,,\; u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\,.$$

(1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{N+1}$.

(2) Montrer que l'application φ de E dans $\mathbf{R}^2$ qui à un élément $u \in E$ associe le couple (u_0, u_1) est un isomorphisme, et en déduire la dimension de E.

(3) Pour $r \in \mathbf{R}$, on pose $v_r = (1, r, \ldots, r^N)$. Déterminer les réels r tels que le vecteur v_r est dans E.

(4) On note p la fonction polynomiale qui à un réel x associe $p(x) = x^2 - ax - b$.

(4a) On se place dans la situation où p a deux racines réelles distinctes. Donner deux vecteurs explicites de $\mathbf{R}^{N+1}$ qui forment une base de E. En déduire une expression explicite des éléments de E.

(4b) Faire de même dans la situation où p admet une racine réelle double. *Indication : on vérifiera que si r est cette racine, alors le vecteur $(nr^n)_{n=0}^{N}$, c'est-à-dire le vecteur $(0, r, 2r^2, \ldots, Nr^N)$, est dans E.*

(5) Dans chacune des deux situations suivantes, déterminer, pour tout $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$, la valeur de u_n :

(5a) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \{0, \ldots, N-2\}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$.

(5b) $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \{0, \ldots, N-2\}$, $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On s'intéresse à des événements $B_1, \dots, B_{100}$. On fait l'hypothèse suivante :

$$\forall k \in \{1, \dots, 100\}, \quad \mathrm{P}(B_k) = \frac{1}{100}\,.$$

Pour tout $k \in \{1, \dots, 100\}$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 lorsque B_k a lieu et 0 sinon. Autrement dit, la variable aléatoire X_k est l'indicatrice de B_k. Enfin, on introduit la variable aléatoire $S = \sum_{k=1}^{100} X_k$.

(1) Pour cette question et cette question seulement, on suppose les variables aléatoires X_k indépendantes. Quelle est alors la loi de S ?

(2) Pour cette question et cette question seulement, on suppose les événements B_k deux à deux disjoints. Quelle est alors la loi de S ?

(3) Calculer l'espérance de S.

(4) Démontrer que pour tous i et j dans $\{1, \dots, 100\}$, la covariance de X_i et X_j vérifie

$$-\frac{1}{10\,000} \leq \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \leq \frac{99}{10\,000}\,.$$

(5) Montrer que l'espérance de S^2 est inférieure ou égale à 100. Est-il possible de trouver des variables aléatoires X_k de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{100}$ telles que l'espérance de S^2 soit égale à 100 ?

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $n \geq 2$ un entier. On note f la fonction qui à tout $t \in [0, n]$ associe

$$f(t) = \left|\prod_{k=0}^{n} (t-k)\right| = |t(t-1)\dots(t-n)|\,.$$

(1) *(1a)* Montrer que la fonction f atteint son maximum sur $[0, n]$.

(1b) Pour $t \in [0, n]$, comparer $f(t)$ et $f(n-t)$. En déduire que f atteint son maximum sur $[0, \frac{n}{2}]$.

(1c) Pour $t \in [1, n]$ non entier, calculer $\frac{f(t-1)}{f(t)}$. En déduire que pour $t \in [1, \frac{n}{2}]$ non entier, on a $f(t-1) > f(t)$, puis que f atteint son maximum sur $]0, 1[$.

(2) On note g la fonction qui à tout $t \in]0, 1[$ associe $g(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{t-k}$.

(2a) Justifier que f est dérivable sur $]0, 1[$ et montrer que pour tout $t \in]0, 1[$, on a $\frac{f'(t)}{f(t)} = g(t)$.

(2b) Montrer que g est strictement décroissante sur $]0, 1[$ et donner ses limites en 0 (à droite) et en 1 (à gauche). En déduire que, sur $]0, 1[$, la fonction f atteint son maximum en un unique réel, que l'on notera t_n. Montrer que l'on a

$$\frac{1}{t_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k - t_n}\,.$$

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$. *Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par la formule

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t.$$

(1) Sans calculer $F(x)$, étudier la dérivabilité et la monotonie de F.

(2) Démontrer que la fonction F est majorée par $F(1) + 1$ et en déduire qu'elle a une limite finie ℓ en $+\infty$.

(3) Montrer que ℓ est égal à $2F(1)$.

(4) Pour tout réel $t \geq 0$, on note

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit

$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) \quad \text{et} \quad S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)\,.$$

(4a) Expliquer pourquoi, pour tout $n \geq 1$, on a

$$s_n \leq F(1) \leq S_n\,.$$

(4b) Exprimer l'amplitude de cet encadrement, c'est-à-dire la différence $S_n - s_n$, en fonction de n.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Soit σ un réel strictement positif. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, toutes d'espérance nulle et toutes de variance σ^2. On introduit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne associée. Soit H un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$, de dimension k, avec $1 \leq k \leq n$. On note P la matrice, dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$, de la projection orthogonale sur H.

(1) Déterminer, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, la valeur de l'espérance $\mathrm{E}\left[(PX)_i\right]$.

(2) Calculer l'espérance $\mathrm{E}[\|X\|^2]$, où $\|X\|$ désigne la norme de X.
La norme d'une matrice colonne X est définie comme celle du vecteur associé $(X_1, \ldots, X_n)$.

(3) *(3a)* Vérifier que ${}^tP = P = P^2$, où ${}^tP$ désigne la transposée de P. Donner la valeur de la trace de P.

(3b) Montrer que $\|PX\|^2 = {}^tXPX$ et en déduire la valeur de $\mathrm{E}[\|PX\|^2]$.

(3c) En utilisant le théorème de Pythagore, déterminer la valeur de $\mathrm{E}[\|(I-P)X\|^2]$, où I désigne la matrice identité.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par la donnée de $u_1 \geq 1$ et

$$\forall n \geq 1\,,\ u_{n+1} = u_n + \frac{n}{u_n}\cdot$$

(1) Dans le cas particulier où $u_1 = 1$, déterminer, pour tout entier $n \geq 1$, la valeur de u_n.

(2) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$.

On suppose désormais que $u_1 > 1$.

(3) Pour tout $n \geq 1$, on note $v_n = u_n - n$.

(3a) Pour tout $n \geq 1$, exprimer v_{n+1} sous la forme $v_n f(u_n)$, où f est une fonction que l'on précisera.

(3b) Montrer que $(v_n)_{n\geq 1}$ converge.

(3c) En déduire que $\frac{1}{n}u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. Soit $n \geq 1$ un entier et soit f un endomorphisme de $\mathbf{R}^n$. On suppose qu'on a l'égalité

$$f \circ f + 15\,\mathrm{Id} = 8f\,,$$

où Id désigne l'endomorphisme identité de $\mathbf{R}^n$.

(1) Déterminer deux réels distincts a et b tels que

$$f \circ f - 8f + 15\,\mathrm{Id} = (f - a\,\mathrm{Id}) \circ (f - b\,\mathrm{Id})\,.$$

Pour la suite de l'exercice, on fixe a et b deux réels distincts vérifiant la condition de la question 1. Si vous avez trouvé des valeurs concrètes pour a et b en question 1, vous pouvez en outre supposer que a et b prennent ces valeurs précises.

(2) On suppose dans cette question que $\mathbf{R}^n = \ker(f - a\,\mathrm{Id}) \oplus \ker(f - b\,\mathrm{Id})$, ce qui sera établi en question (3). Montrer que f est diagonalisable.

(3) *(3a)* Déterminer $\ker(f - a\,\mathrm{Id}) \cap \ker(f - b\,\mathrm{Id})$.

(3b) Établir que $\mathbf{R}^n = \ker(f - a\,\mathrm{Id}) \oplus \ker(f - b\,\mathrm{Id})$.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ un entier et soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, toutes de loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\mathrm{P}(X_i \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - e^{-t} & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

On note $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

(1) Déterminer la fonction de répartition de M_n, notée F_n, ainsi que sa densité, notée f_n.

(2) Montrer, sans trop de calculs, que $\mathrm{E}[M_n] \leq n$.

(3) Vérifier que $t(1 - F_n(t))$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

(4) En déduire, après une intégration par parties, que

$$\mathrm{E}[M_n] = \int_0^{+\infty} (1 - F_n(t))\, \mathrm{d}t\,.$$

(5) Montrer que $\mathrm{E}[M_n] = \int_0^1 \frac{1-y^n}{1-y}\, \mathrm{d}y$ et établir finalement que $\mathrm{E}[M_n] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On s'intéresse dans cet exercice à dix types de fruits, qu'on numérote de 1 à 10 (par exemple 1 = abricots, 2 = bananes, 3 = cerises, etc.). Xavier a en tête des prix adaptés pour chaque type de fruits : pour chaque $i \in \{1, \ldots, 10\}$, il note x_i le prix en euros qu'il considère adapté pour un fruit de type i. Yasmine a elle aussi en tête des prix adaptés pour chaque type de fruits : pour chaque $i \in \{1, \ldots, 10\}$, elle note y_i le prix en euros qu'elle considère adapté pour un fruit de type i. On introduit les vecteurs suivants $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{10} \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{10} \end{pmatrix}$, dont les coordonnées sont strictement positives.

Vanessa arrive et propose des trocs. On appelle troc un échange d'une collection de fruits contre une autre collection de fruits. Un troc sera encodé par un vecteur $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{10} \end{pmatrix}$, où a_i désigne la quantité de fruits de type i que Vanessa désire obtenir (un a_i négatif s'interprète comme « Vanessa propose de *donner* $|a_i|$ fruits de type i »). Vanessa propose neuf trocs. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, 9\}$, on note $v_j = \begin{pmatrix} v_{1,j} \\ \vdots \\ v_{10,j} \end{pmatrix}$ le vecteur encodant le $j^{\text{ème}}$ troc proposé par Vanessa.

Il se trouve qu'aussi bien Xavier que Yasmine estime que chacun des neuf trocs proposé par Vanessa est parfaitement équilibré en termes de prix.

(1) Expliquer pourquoi, pour tout $j \in \{1, \ldots, 9\}$, le vecteur x est orthogonal à v_j et le vecteur y est aussi orthogonal à v_j.

(2) Dans cette question et cette question seulement, on suppose que, pour tout $j \in \{1, \ldots, 9\}$, le $j^{\text{ème}}$ troc consiste pour Vanessa à donner un fruit de type j et demander en échange deux fruits de type $j+1$. Montrer que dans ce cas la famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_9)$ est une famille libre.

(3) On suppose dans cette question que la famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_9)$ est une famille libre.

(3a) Montrer que les vecteurs x et y sont colinéaires. En déduire que si Vanessa propose un dixième troc, ce troc sera jugé équilibré par Xavier si et seulement s'il est jugé équilibré par Yasmine.

(3b) A-t-on nécessairement égalité des vecteurs x et y ?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de 10 à 15 minutes. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$. *Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. On modélise le cours de l'artichaut de la façon suivante. Initialement, la valeur d'un artichaut est $X_0 = 1$. Puis, chaque jour $n \geq 1$, sa valeur est multipliée par une variable aléatoire R_n positive : $X_n = R_n X_{n-1}$. On suppose que les variables aléatoires $R_1, R_2, R_3, \ldots$ sont indépendantes et identiquement distribuées, de loi donnée par :

$$\mathrm{P}(R_1 = 1 - a) = \mathrm{P}(R_1 = 1 + a) = \frac{1}{2},$$

avec $a \in]0, 1[$ un réel donné.

(1) Pour tout $n \geq 0$, déterminer l'espérance de X_n.

(2) Pour tout $n \geq 0$, déterminer la variance de X_n.

(3) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

(4) Calculer l'espérance de $\ln(R_1)$ et vérifier que $\mathrm{E}[\ln(R_1)] < 0$.

(5) En s'intéressant à la variable aléatoire $\ln(X_n)$, trouver un réel $\delta > 0$ tel que $\mathrm{P}(X_n \geq e^{-\delta n})$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. On s'intéresse aux fonctions suivantes :

$$f(x, y) = xy, \qquad g(x, y) = x^2 + y^2, \qquad h(x, y) = (|x| + |y|)^2.$$

Chacune de ces fonctions est définie sur $\mathbf{R}^2$.

(1) Démontrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a

$$2\,|f(x, y)| \leq g(x, y) \leq h(x, y) \leq 2g(x, y).$$

(2) Déterminer le ou les points critiques de f. Pour chacun d'entre eux, déterminer s'il s'agit ou non d'un maximum local et s'il s'agit ou non d'un minimum local.

(3) Dessiner les lignes de niveau de g et de h.

(4) Existe-t-il un nombre réel $C > 0$ tel que pour tout réel $x \neq 0$ et tout réel $y \neq 0$, on ait $g(x, y) \leq C\,|f(x, y)|$?

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\textit{10 à 15 minutes}}$*. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆⋆⋆

Exercice 1. Dans tout cet exercice, α désigne un réel strictement positif fixé. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_α donnée par

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, 1], \\ \frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \in]1, +\infty[\,. \end{cases}$$

(1) Calculer, pour tout réel t, la quantité $\mathrm{P}(X > t)$.

(2) À quelle condition sur α la variable aléatoire X admet-elle une espérance finie ? Lorsque cette condition est vérifiée, donner la valeur de $\mathrm{E}[X]$.

(3) Pour tout réel x, on note $\lceil x \rceil$ l'unique entier k tel que $k-1 < x \leq k$. Le nombre $\lceil x \rceil$ s'appelle la partie entière supérieure de x. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \lceil \ln(X) \rceil$.

(4) Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et toutes de densité f_α. On pose

$$Y_n = \min(X_1, \ldots, X_n)\,.$$

Montrer que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, la quantité $\mathrm{P}\left(n(Y_n - 1) > t\right)$ converge, quand n tend vers $+\infty$, vers une limite que l'on déterminera.

⋆⋆⋆

Exercice 2. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par $u_0 > 0$, et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}\,.$$

(1) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite, finie ou non, que peut-on dire de cette limite ?

(2) *(2a)* Montrer que s'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $u_{p+1} \leq u_p$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang et tend vers 0.

(2b) Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ lorsque l'hypothèse de la question $(2a)$ n'est pas vérifiée ?

(3) Montrer que s'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $u_p \leq p+1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

(4) Montrer que s'il existe $p \in \mathbf{N}$ tel que $u_p \geq p+2$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

(5) Prouver l'existence d'un réel $a \in [1,2]$ tel que si $u_0 < a$, alors $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, et si $u_0 > a$, alors elle diverge.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$. *Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par la formule $f(x) = \exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right)$.

(1) Dresser le tableau de variations de f. On y indiquera notamment les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

(2) Montrer qu'on a l'égalité $\int_0^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = 1 + \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(3) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$. *On pourra effectuer un changement de variable $y = x + a$ pour un a bien choisi.*

(4) Calculer le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 3 pour x proche de 0. En déduire l'allure locale du graphe de f au voisinage de 0.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ engendré par $u_1 = (2, -1, -3, 2)$ et $u_2 = (3, 1, 0, 5)$, et soit $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \text{ tels que } 4x + y - z - t = 0 \text{ et } 3y - 3z + t = 0\}$.

(1) Vérifier que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

(2) Montrer que $F \cap G$ est une droite vectorielle et en donner un vecteur v non-nul.

(3) Compléter v en une base de F, c'est-à-dire donner une base de F dont le premier vecteur est v. De même, compléter v en une base de G.

(4) Déterminer une base de $H = F + G$.

(5) Soit $w = (1, 1, 0, 0)$, et soit $D = \mathrm{Vect}(w)$ la droite vectorielle engendrée par w. Soit enfin

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \text{ tels que } 3x - 2y + z + 4t = 0\}.$$

(5a) Montrer que S et D sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^4$.

(5b) On note p le projecteur sur D parallèlement à S. Pour tout $u = (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$, calculer $p(u)$ en fonction de x, y, z et t.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$*. Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. On définit une fonction f en posant, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$f(x, y) = \left(x^2 + y^2\right)\left(x^2 + y^2 + 4 - 4y\right).$$

(1) Résoudre l'équation $f(x, y) = 0$.

(2) Pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, que peut-on dire du signe de $f(x, y)$?

(3) *(3a)* Déterminer les points critiques de f.

(3b) Pour chaque point critique que vous avez trouvé : s'agit-il d'un minimum local ? d'un minimum global ? d'un maximum local ? d'un maximum global ?

(4) On se donne g une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur $\mathbf{R}^2$. On définit une fonction h par la formule $h(x, y) = \exp(g(x, y))$. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, montrer que (x, y) est un point critique de h si et seulement si (x, y) est un point critique de g.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2. Étant donnée une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, on considère la procédure définie en appliquant successivement les quatre étapes suivantes :

a) échanger la première ligne et la troisième ligne ;

b) dans la matrice obtenue à l'étape précédente, soustraire la deuxième colonne à la troisième, c'est-à-dire remplacer la colonne C_3 par $C_3 - C_2$;

c) dans la matrice obtenue à l'étape précédente, ajouter la troisième ligne à la deuxième, c'est-à-dire remplacer la ligne L_2 par $L_2 + L_3$;

d) dans la matrice obtenue à l'étape précédente, échanger la première colonne et la troisième colonne.

On notera $\varphi(M)$ la matrice obtenue en appliquant cette procédure *(prononcer « phi M »)*. Enfin, on pose

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 10 & 20 & 50 \\ 100 & 200 & 500 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer $\varphi(N)$.

(2) Trouver deux matrices P et Q telles que, pour tout $M \in \mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, on ait $\varphi(M) = PMQ$.

(3) Si on applique les étapes non plus dans l'ordre « abcd » mais dans l'ordre « acbd », est-ce que cette nouvelle procédure renvoie toujours pour résultat $\varphi(M)$? Même question si on procède dans l'ordre « adcb ».

(4) Est-ce que l'application φ définit un isomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ vers $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$? Si oui, donner sa bijection réciproque.

(5) *(5a)* Déterminer la matrice PQ.

(5b) Exprimer le spectre de $\varphi(M)$ en fonction du spectre de M.

Commentaire a posteriori : la matrice Q n'étant pas l'inverse de P, la question 5b n'était pas traitable. La façon de gérer la reprise et la notation ont été adaptées en conséquence.

Vous traiterez les exercices suivants et les présenterez tous deux, dans l'ordre de votre choix. Le temps de préparation est de 90 minutes. L'interrogation durera 30 minutes environ.

Au début de l'interrogation, vous disposerez d'un temps pour présenter vos résultats, sans intervention du jury. Nous vous encourageons à ne pas recopier l'intégralité de vos calculs, mais plutôt à vous concentrer sur les points clé de votre raisonnement. La durée recommandée pour ce temps est de $\boxed{\text{10 à 15 minutes}}$. *Vous pouvez toutefois utiliser moins de 10 minutes si vous le souhaitez, sans que cela ne vous soit préjudiciable. En revanche, nous vous interromprons au bout de 15 minutes.*

Le jury reviendra ensuite sur les questions qu'il souhaitera approfondir, y compris éventuellement celles que vous n'auriez pas eu le temps d'aborder pendant la préparation. Il vous donnera au besoin des indications.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1. On définit la fonction f par la formule $f(x) = \exp(x)$ et g par la formule $g(x) = x^5$. Les fonctions f et g ont pour domaine de définition $\mathbf{R}$.

(1) Pour chacune des fonctions h suivantes, démontrer l'énoncé « pour tous réels x et y vérifiant $x \leq y$, on a $h(x) \leq h(y)$ ».

(1a) Traiter la fonction $h_1 = g$, définie sur $\mathbf{R}$ par la formule $h_1(x) = x^5$.

(1b) Traiter la fonction $h_2 = g \circ f$, définie sur $\mathbf{R}$ par la formule $h_2(x) = g(f(x))$.

(1c) Traiter la fonction $h_3 = g \circ f \circ g \circ f \circ g$, définie sur $\mathbf{R}$ par la formule $h_3(x) = g(f(g(f(g(x)))))$.

(2) On introduit A l'ensemble de tous les $(x, \ln(x))$ où x parcourt $]0, +\infty[$. De même, on désigne par B l'ensemble de tous les $(x, \exp(-x))$ où x parcourt $\mathbf{R}$. Autrement dit, A désigne la partie du plan qui correspond au graphe de la fonction $\ln(x)$, et B fait de même pour la fonction $\exp(-x)$. Trouver un endomorphisme φ de $\mathbf{R}^2$ tel que l'image de A par φ soit égale à l'ensemble B. L'image de A par φ est définie comme l'ensemble des $\varphi(x, y)$ où (x, y) parcourt A.

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2.

(1) On introduit cinq points dans le plan $\mathbf{R}^2$: le point A est défini par les coordonnées $(1, 2)$, le point B par $(4, 2)$, C par $(3, 6)$, D par $(-2, 1)$ et enfin O par $(0, 0)$. Pour chaque $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, on dira qu'un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ est de type k si son intersection avec $\{A, B, C, D, O\}$ contient *exactement* k points.

(1a) Dessiner les points A, B, C, D et O dans le plan. Donner une équation de la droite passant par les points B et C.

(1b) Pour chaque $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, répondre à la question suivante : combien y a-t-il de sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$ qui sont de type k ?

(2) On considère les vecteurs $v_1 = (0, 0)$, $v_2 = (1, 0)$, $v_3 = (0, 1)$ et $v_4 = (1, 1)$. On se donne Z une variable aléatoire telle que $\mathrm{P}(Z = 1) = \mathrm{P}(Z = 2) = \mathrm{P}(Z = 3) = 1/6$ et $\mathrm{P}(Z = 4) = 1/2$. On se donne W une variable aléatoire indépendante de Z et de même loi. On note X la première coordonnée de v_Z et Y sa seconde coordonnée. De même, on note U la première coordonnée de v_W et V sa seconde coordonnée. On peut reformuler les deux dernières phrases en disant qu'on a $v_Z = (X, Y)$ et $v_W = (U, V)$.

(2a) Est-ce que les variables aléatoires U et V sont indépendantes ? Est-ce que U et X sont indépendantes ?

(2b) On s'intéresse au produit scalaire de v_W et v_Z : on introduit la variable aléatoire $S = \langle v_W, v_Z \rangle$. Calculer l'espérance de S.

(2c) Quelle est la probabilité de l'événement « les vecteurs v_W et v_Z forment une base de $\mathbf{R}^2$ » ?